VI Conferência Nacional de CARTOGRAFIA e GEODESIA

RESOLUÇÃO DO CHAMADO PROBLEMA FUNDAMENTAL DA GEODESIA POR INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Jorge Teixeira Pinto

Sumário:

- Justificação do trabalho;
- Formulação do Problema;
- A Geodésica;
- Integração Numérica;
- Dificuldades e soluções;
- Limitações e casos particulares;
- Conclusões.

Justificação do trabalho:

- Desenvolver uma alternativa viável, baseada em integração numérica, às propostas existentes;

- Retomar programa desenvolvido em 1988 e nunca formalmente publicado;

MVAX Geoteip

Return | LF | Escape | CTL-S | CTL-Q | DEL | Break | CTL-C | CTL-U | IC | DC

M 39 42 0:

PROBLEMA FUNDAMENTAL
DA
GEODESIA

ELIPSOIDES

1-HAYFORD (internacional)
2-BESSEL
3-PUISSANT
4-WGS-72
5-WGS-84
6-GRS(67)
7-GRS(80)
8-CLARKE(1880)

9-OUTRO ?

OPÇÃO: 7

ELEMENTOS

a=_______.___
b=_______.___
f=1/___.__
e2=_.______________D-3

INTERMÉDIOS? (MÁX.100) N=__7

ESCOLHA DO PROBLEMA

1- PROBLEMA DIRECTO
2- PROBLEMA INVERSO

OPÇÃO : 1

SE ESCOLHEU 9 FORNEÇA 2 ELEMENTOS DETERMINANTES DO SEU ELIPSOÍDE.

MVAX Geoteip

Return | LF | Escape | CTL-S | CTL-Q | DEL | Break | CTL-C | CTL-U | IC | DC

M 68 74

PROBLEMA DIRECTO

DADOS DE PARTIDA		DADOS DE CHEGADA	
LATITUDE	= 40°__'__.______"	LATITUDE	= -4°20'42.460920"
LONGITUDE	= -10°__'__.______"	LONGITUDE	= 139°12'49.438650"
AZIMUTE ->	= 45°__'__.______"	AZIMUTE <-	= 327°2'42.288618"
DISTÂNCIA	=15000000.000m		

DADOS DE CHEGADA RELATIVOS AOS PONTOS INTERMÉDIOS

Nº do PONTO	LATITUDE	LONGITUDE	AZIMUTE INVERSO
1	55°22'58.7659"	11°7'13.4276"	287°42'0.9492"
2	50°21'27.4345"	28°55'23.8755"	301°56'57.5274"

SAIR->PF1 S,AVANÇAR->TAB,V.ATRÁS->F12,APAGAR->F13 CONTINUAR?MENU?(S/N/M):_

MVAX Geoteip

Return | LF | Escape | CTL-S | CTL-Q | DEL | Break | CTL-C | CTL-U | IC | DC

M 217 319 0:

PROBLEMA_INVERSO

DADOS_DE_PARTIDA

1º Pto
LATITUDE = _40°__'__.______"
LONGITUDE=_-10°__'__.______"

2º Pto
LATITUDE = _-4°20'42.460920"
LONGITUDE=_139°12'49.438650"

DADOS_DE_CHEGADA

DISTÂNCIA = 15000000.000m
AZIMUTE 1->2 = _45°_0'_0.000000"
AZIMUTE 2->1 = 327°_2'42.288618"

SAIR->PF1 S,AVANÇAR->TAB,V.ATRÁS->F12,APAGAR->F13

CONTINUAR?MENU?(S/N/M):_

Geodetic Calculations - Vincenty's Formulae, Inverse Method

Given latitude and longitude of two points, calculate the ellipsoidal distance and forward and reverse azimuths between the points.

- The calculations are performed using the GRS80 ellipsoid which is used for Australia's new coordinate system (The Geocentric Datum of Australia - GDA) and is also compatible with global coordinate system (a = 6,378,137.0 metres; 1/f = 298.25722210)
- Vincenty's formulae are used (T. Vincenty, Survey Review, **23**, No 176, p 88-93,1975) to calculate lines ranging from a few cm to nearly 20,000 km, with millimetre accuracy.
- Latitude must be between 0° and ± 90°. South Latitude is negative (eg -35° 55' 56.12'").
- Longitude mast be between 0° and ± 180°. West Longitude is negative (eg -148° 56' 25.12'").
- **NOTE:** "The inverse formulae may give no solution over a line between two nearly antipodal points. This will occur when the difference between two latitudes is greater than 180 Deg. in absolute value" (Vincenty, 1975).
- **NOTE**: Given the latitude and longitude of a point (1) and the forward geodetic azimuth (1-2) and ellipsoidal distance to a second point (2), **calculate** the latitude and longitude of the second point and the reverse azimuth (2-1) using the direct method.

POINT 1	**Latitude:**	40	*Deg.*	0	*Min.*	0	*Sec.*
A	**Longitude:**	-10	*Deg.*	0	*Min.*	0	*Sec.*
POINT 2	**Latitude:**	-4	*Deg.*	20	*Min.*	42.460928	*Sec.*
B	**Longitude:**	139	*Deg.*	12	*Min.*	49.438658	*Sec.*

YOUR ENTERED VALUES	**Latitude (Pt 1):**	40 deg	0 min	0 sec
	Longitude (Pt 1):	-10 deg	0 min	0 sec
	Latitude (Pt 2):	-4 deg	20 min	42.460928 sec
	Longitude (Pt 2):	139 deg	12 min	49.438658 sec

If these values are correct, press "Submit Data" to receive the results.

Submit Data Reset Data

VI Conferência Nacional de CARTOGRAFIA e GEODESIA

GDA Vincenty Calculation Results (Inverse)

Location:	**POINT I**	**POINT II**
Name:	A	B
Latitude:	40 ° 0 ' 0.00000 "	-4 ° 20 ' 42.46093 "
Longitude:	-10 ° 0 ' 0.00000 "	139 ° 12 ' 49.43866 "
Forward Azimuth:		45 ° 46 ' 49.33 "
Reverse Azimuth:		326 ° 32 ' 28.29 "
Ellipsoidal Distance:		14999727.798 meters

Another calculation

Comments & Suggestions

Dif. na distância de 272 m ou 18 ppm;
No azimute 46’ 49”,33

```
[Session started at 2009-05-04 11:18:51 +0100.]
  Latitude (gg.mmsssss...) do 1º ponto=
40.
  Longitude (gg.mmsssss...) do 1º ponto=
-10.
  Latitude (gg.mmsssss...) do 2º ponto=
-4.204246093
  Longitude (gg.mmsssss...) do 2º ponto=
139.124943866
 F1 em rad=  0.698131700797731 79
 AZ10=  0.801133914179682 16
 S00=   4420403.8483124534
 SD FINAL=  1.4544146910711042 2E-006
 SD FINAL=  5.3147245324680625 3E-006
 SD FINAL=  1.4617310543640904 5E-006
 SD FINAL=  5.3220408956500264 7E-006
 SD FINAL=  1.4617555542106863 7E-006
 SD FINAL=  5.3220653956076446 9E-006
 SD FINAL=  1.4618046353942482 1E-006
 SD FINAL=  5.3221144767912065 3E-006
 SD FINAL=  1.4617064735267248 9E-006
 SD FINAL=  5.3220163148681720 6E-006
 SD FINAL=  1.4617066359523533 9E-006
 SD FINAL=  5.3220164772938005 6E-006
 SD FINAL=  1.4617066363964426 0E-006
 SD FINAL=  5.3220164777378897 7E-006
 SD FINAL=  1.4617066373956433 3E-006
 SD FINAL=  5.3220164787370904 9E-006
 SD FINAL=  1.4617066353417307 3E-006
 SD FINAL=  5.3220164766276667 5E-006
 SD FINAL=  1.4617066355082641 8E-006
 SD FINAL=  5.3220164768497113 5E-006
 S=    14999727.861016806
 AZ1=   45.461576697989564
 AZ2=   326.32498788999175

PFGeodesia has exited with status 0.
```

GDA Vincenty Calculation Results (Inverse)

Location:	POINT I	POINT II
Name:	A	B
Latitude:	40 ° 0 ' 0.00000 "	-4 ° 20 ' 42.46093 "
Longitude:	-10 ° 0 ' 0.00000 "	139 ° 12 ' 49.43866 "
Forward Azimuth:		45 ° 46 ' 49.33 "
Reverse Azimuth:		326 ° 32 ' 28.29 "
Ellipsoidal Distance:		14999727.798 meters

Another calculation

Comments & Suggestions

Dif. na distância de 0,063 m ou $4,2\times10^{-9}$; No azimute 33",6

...mas aumentando o nº de secções:

Dif. na distância de 0,028 m ou $2,8\times10^{-9}$; No azimute 10",6

```
SD FINAL=  1.4613502580251847 0E-007
SD FINAL=  5.3216600992556095 7E-007
S=    14999727.826297149
AZ1=   45.463872035850166
AZ2=   326.32351168292337

PFGeodesia has exited with status 0.
```

Formulação do Problema

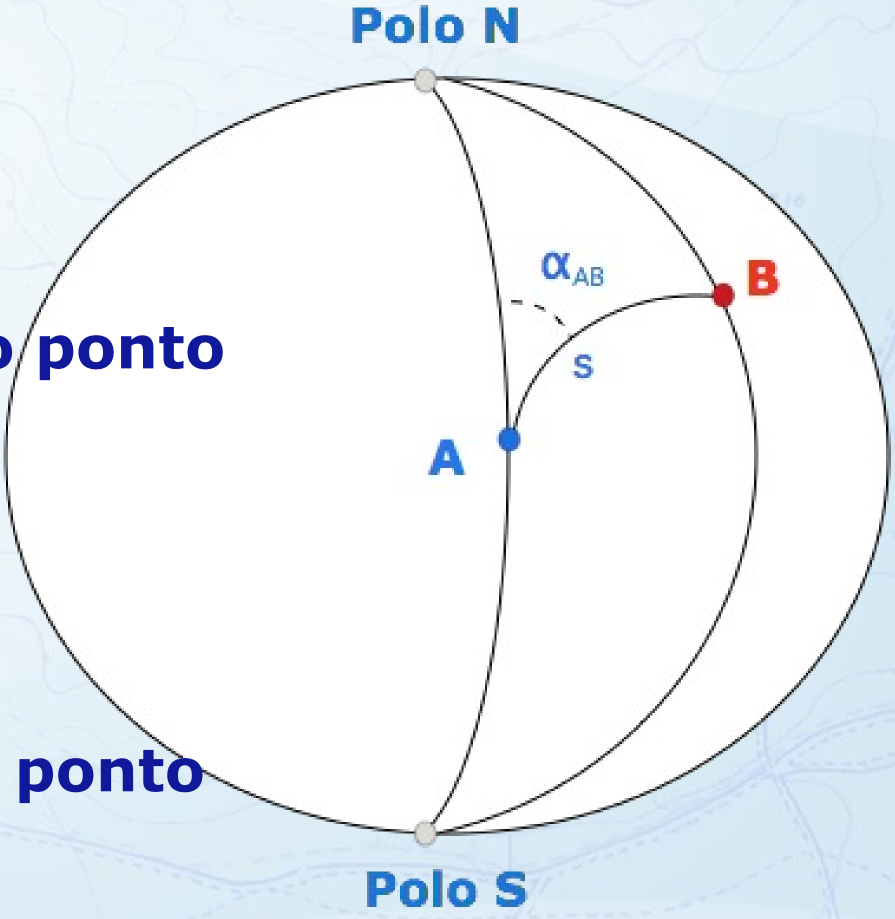
Problema Directo

Dados:

- **Latitude e Longitude do ponto de partida;**
- **Azimute de partida;**
- **Distância a percorrer.**

Obter:

- **Latitude e Longitude do ponto de chegada;**
- **Azimute inverso.**



Formulação do Problema

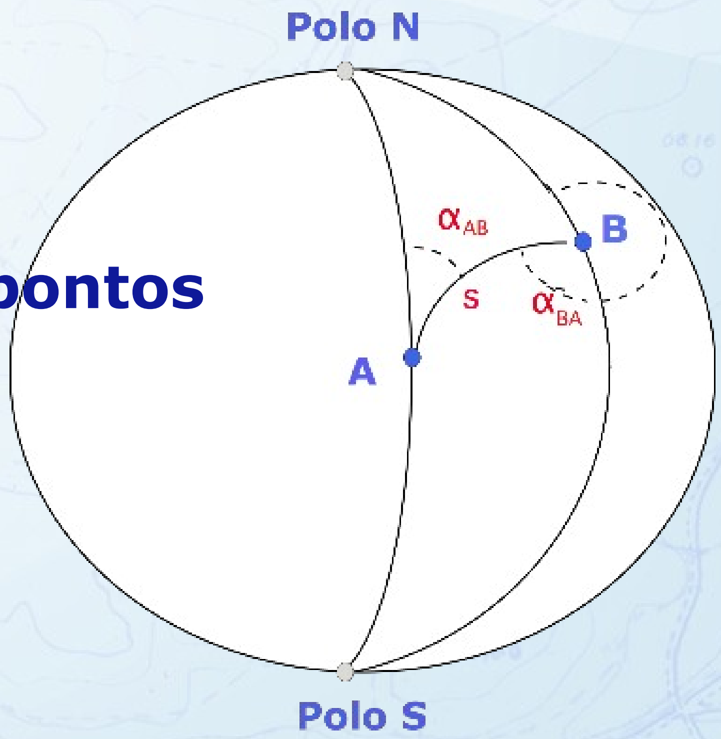
Problema Inverso

Dados:

- **Latitude e Longitude dos pontos extremos A e B;**

Obter:

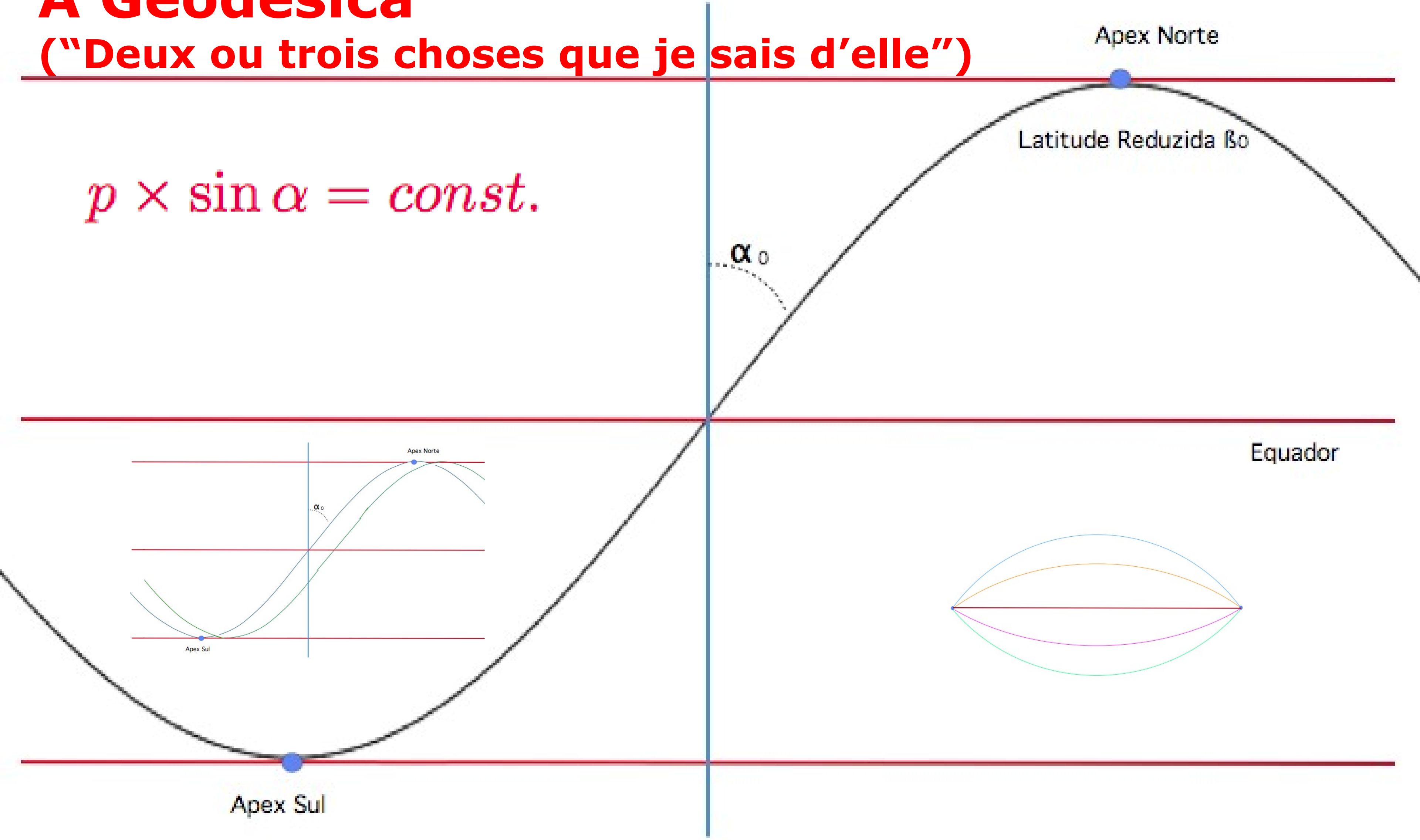
- **Azimute AB;**
- **Azimute BA;**
- **Distância AB.**



A Geodésica

("Deux ou trois choses que je sais d'elle")

$$p \times \sin \alpha = const.$$



A Geodésica. Fórmulas Básicas. 1/3

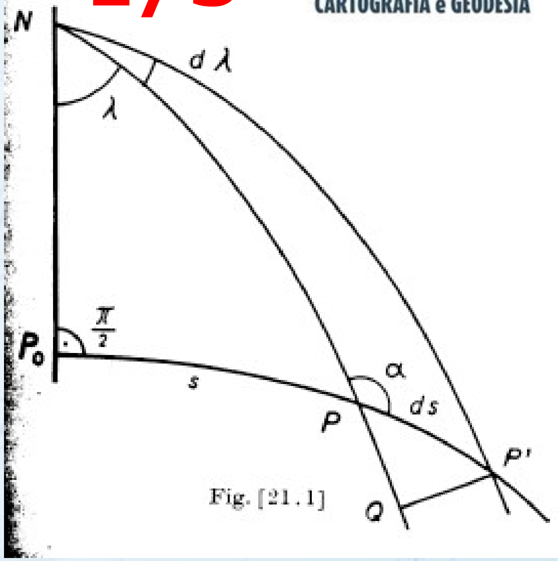


Fig. [21.1]

Latitude Reduzida:

$$tg\,\beta = \sqrt{1-e^2}\,tg\,\varphi$$

Fórmulas do procedimento de Bessel

1. **Elemento linear da Geodésica:**

$$ds = -a\sqrt{\frac{1-e^2\cos^2\beta}{\cos^2\beta-\cos^2\beta_0}}\cos\beta d\beta$$

2. **Elemento de arco da Longitude:**

$$d\lambda = \sin\alpha\frac{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta}}{\cos\beta}d\sigma$$

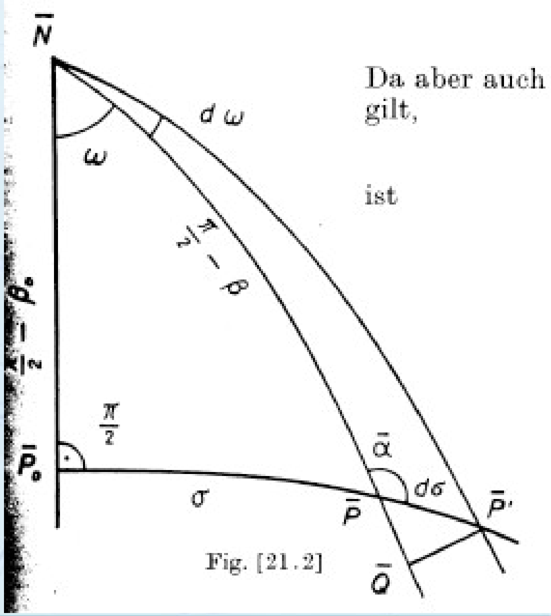


Fig. [21.2]

VI Conferência Nacional de CARTOGRAFIA e GEODESIA

A Geodésica. Fórmulas Básicas. 2/3

3. Relação de $d\sigma$ elemento linear sobre a esfera, com $d\beta$ e o azimute α:

$$d\sigma = d\beta / \cos\alpha$$

4. Relação entre β e α:

$$\cos\beta \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta_0$$

6. Elemento de arco da Longitude, no elipsóide, em função de $d\beta$*:

$$d\lambda = \frac{\cos\beta_0}{\cos\beta}\sqrt{\frac{1 - e^2\cos^2\beta}{\cos^2\beta - \cos^2\beta_0}}\,d\beta$$

* Fórmula deduzida em 1988. Aparece também em Hubert Schmidt, 1999.

VI Conferência Nacional de CARTOGRAFIA e GEODESIA

A Geodésica. Fórmulas Básicas. 3/3

$$s = -a \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta - \cos^2 \beta_0}} \cos \beta d\beta$$

$$\lambda = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\cos \beta_0}{\cos \beta} \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta - \cos^2 \beta_0}} d\beta$$

Integração Numérica por Quadraturas de Gauss (Gauss-Legendre)

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} w(x_k) f(x_k) + R_n(x)$$

where x_k, associated with zeros of orthogonal polynomials, are the integration points.

$w(x)$ is the weighting function related to the orthogonal polynomials.

http://www.efunda.com/math/num_integration/num_int_gauss.cfm

Gauss-Legendre Formula: The Gauss-Legendre integration formula is the most commonly used form of Gaussian quadratures. Some numerical analysis books refer to the Gauss-Legendre formula as **the** Gaussian quadratures' definitive form. It is based on the Legendre polynomials of the first kind $P_n(x)$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}d\xi\right)$$

$$= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(\xi)d\xi = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} w(\xi_k)g(\xi_k) + R_n(\xi)$$

$$= \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} w(\xi_k) f\left(\frac{b-a}{2}\xi_k + \frac{b+a}{2}\right) + R_n(\xi)$$

where $\xi = \dfrac{2x-b-a}{b-a}$, i.e., $x = \dfrac{b-a}{2}\xi + \dfrac{b+a}{2}$, $-1 < \xi < 1$,

ξ_k is the kth zero of $P_n(\xi)$,

$$w(\xi_k) = \frac{2}{\left(1-\xi_k^{\,2}\right)\left[P_n'(\xi_k)\right]^2},$$

$$g(\xi) = f\left(\frac{b-a}{2}\xi_k + \frac{b+a}{2}\right),$$

$$R_n(\xi) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} g^{(2n)}(\xi).$$

Abscissas and Weights of Gauss-Legendre Integration

24 points Gauss-Legendre Integration Go

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\right)d\xi \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} w(\xi_k) f\left(\frac{b-a}{2}\xi_k + \frac{b+a}{2}\right)$$

No. k	Abscissas ξ_k	Weight $w(\xi_k)$
1	-0.995187219997	0.0123412297185
2	-0.974728555971	0.0285313860439
3	-0.938274552003	0.0442774398676
4	-0.886415527004	0.0592985850337
5	-0.820001985974	0.0733464816501
6	-0.740124191579	0.0861901617117
7	-0.648093651937	0.0976186522496
8	-0.545421471389	0.107444270284
9	-0.433793507626	0.115505668234
10	-0.315042679696	0.121670473118
11	-0.191118867474	0.125837456543
12	-0.0640568928626	0.127938195546
13	0.0640568928626	0.127938195546
14	0.191118867474	0.125837456543
15	0.315042679696	0.121670473118
16	0.433793507626	0.115505668234
17	0.545421471389	0.107444270284
18	0.648093651937	0.0976186522496
19	0.740124191579	0.0861901617117
20	0.820001985974	0.0733464816501
21	0.886415527004	0.0592985850337
22	0.938274552003	0.0442774398676
23	0.974728555971	0.0285313860439
24	0.995187219997	0.0123412297185

VI Conferência Nacional de CARTOGRAFIA e GEODESIA

Integração Numérica: algoritmos

Problema Directo

1. Calcula a constante de Clairaut;
2. Calcula um primeiro valor aproximado para β_2;
3. Verifica a existência de um (ou mais) Apex;
4. Ciclo em β contra a distância;
5. Valor final de β_2;
6. Calcula $\Delta\lambda$;
7. Calcula o azimute inverso;

```
ELSE
           LI=1.5D-3
END IF

DO WHILE (DIF.GT.LI)
S=0.D0
IF(BT1.LT.BT2)THEN
CALL SQG(A,E2,C2,BT1,BT2,S)
ELSE
CALL SQG(A,E2,C2,BT2,BT1,S)
END IF
PRINT*,'Distância BT1-BT2 =', S
DIF=S-D
D1=D1-DIF
BT2=DASIN(DSIN(BT1)*DCOS(D1/RA)+DCOS(BT1)*DSIN(D1/RA)*DCOS(AZR1))
DIF=DABS(DIF)
END DO
```

VI Conferência Nacional de CARTOGRAFIA e GEODESIA

Integração Numérica: algoritmos

Problema Inverso

1. Resolução do triângulo esférico A-Polo-B para obtenção de um 1º valor para a distância e para os azimutes ;
2. Calcula um primeiro valor aproximado para a Constante de Clairaut;
3. Verifica a existência de um (ou mais) Apex;
4. Ciclo na Constante de Clairaut contra $\Delta\lambda$;
5. Valor final da Constante;
6. Calcula a distância;
7. Calcula os azimutes.

```
DO WHILE (EDL(2).GT.T)
I=I+1

DO 98 J=1,2

DL0=0.D0
IF(S0.LT.S00)THEN
IF(BT1.LT.BT2)THEN
CALL SQGL(A,E2,C2,BT1,BT2,DL0)
ELSE
CALL SQGL(A,E2,C2,BT2,BT1,DL0)
END IF
ELSE
DL01=0.D0
DL02=0.D0
IF(BT1.LT.BT0)THEN
CALL SQGL(A,E2,C2,BT1,BT0,DL01)
CALL SQGL(A,E2,C2,BT2,BT0,DL02)
DL0=DL01+DL02
ELSE IF(BT1.GT.BT0)THEN
CALL SQGL(A,E2,C2,BT0,BT1,DL01)
CALL SQGL(A,E2,C2,BT0,BT2,DL02)
DL0=DL01+DL02
END IF
END IF
```

VI Conferência Nacional de CARTOGRAFIA e GEODESIA

Integração Numérica: resultados

Casos sem Apex

A integração numérica dá resultados com incertezas muito aceitáveis: inferiores ao cm na distância; inferiores a 0",0001 nas coordenadas; inferiores a 0,"001 no azimute.

Exemplo (Jordan/Eggert/Kneissl, Band IV, pg. 1012):

Ponto de partida: Lat. - 50º N; Lon. – 10º E; Azimute – 140º; s – **15 000 km**; Elipsóide de Hayford

Quadro 2 – Comparação de uma grande geodésica que não passa pelo Apex

Pontos de interpolação	Nº de secções	Latitude de chegada, S	Longitude de chegada, E	Azimute inverso
7	100	-62º 57' 03",20387	105º 05' 38",29966	294º 46' 41",48390
Jordan	-	03",20382	38",29955	41",48399

Quadro 3 – Resultado do problema inverso aplicado ao exemplo de Jordan (elipsóide de Hayford)

Pontos de interpolação	Nº de secções	Comprimento, S m	Azimute A-B	Azimute B-A
7	100	15 000 000,000	140º 00' 00",00000	294º 46' 41",48390

VI Conferência Nacional de CARTOGRAFIA e GEODESIA

Integração Numérica: resultados

Casos com Apex

Nos casos que envolvem Apex os resultados da integração numérica dependem do nº de secções e do nº de pontos de Interpolação da quadratura de Gauss-Legendre.

Exemplo: Lat. 45º N; Long. 0º; Azimute 45º; Dist. 5 000 km (GRS80)

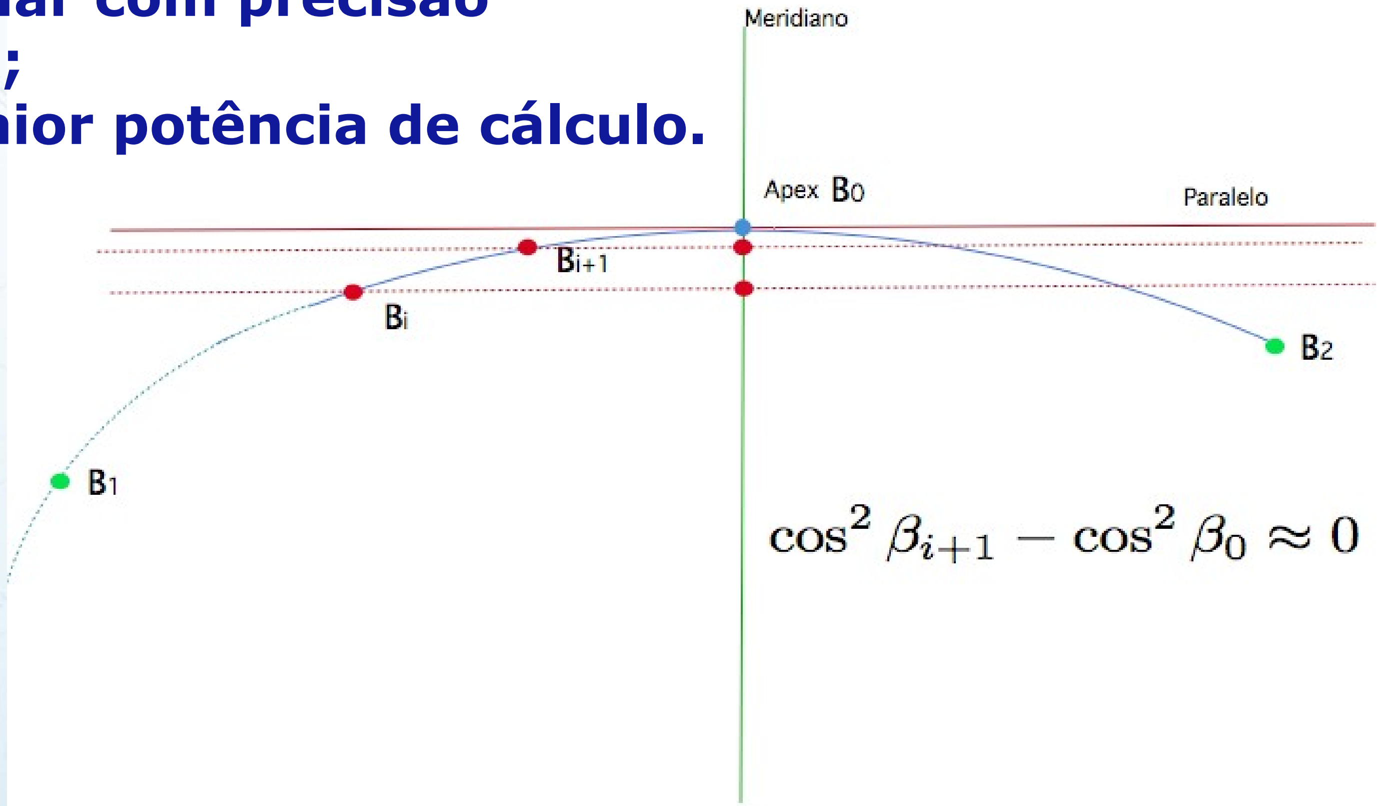
Quadro 1 – Influência do nº de pontos de interpolação e de secções no resultado final

Pontos de interpolação	Nº de secções	Latitude de chegada, N	Longitude de chegada, E	Azimute inverso
12	1×10^6	58º 40' 05",51231	73º 22' 56",29258	286º 05' 37",72779
12	2×10^6	05",92995	56",52406	35",35425
12	3×10^6	06",11494	56",62632	34",30285
12	4×10^6	06",22532	56",68756	33",67553
24	1×10^6	06",21081	56",67966	33",75798
32 fecha c/ - 1cm	18×10^7	06",89036	57",05536	29",89563

Nota: a solução para este problema, será, de acordo com a página dos serviços geodésicos australianos, 58° 40' 06",9382; 73° 22' 57",08232 e 286° 05' 29",62.

Dificuldades e soluções:

1. Melhorar o sistema iterativo;
2. Aumentar o nº de pontos de interpolação;
3. Trabalhar com precisão Quádrupla;
4. Usar maior potência de cálculo.



$$\cos^2 \beta_{i+1} - \cos^2 \beta_0 \approx 0$$

Limitações e casos particulares

As soluções por expansão em séries não resolvem certos casos considerados antipodais

Um exemplo entre outros:

GDA Vincenty Calculation Results (Inverse)

Sory Vincenty's Inverse Formula Will NOT Handle Antipodal Solution !!

Location:	**POINT I**	**POINT II**
Name:	A	B
Latitude:	0 ° 0 ' 0.00000 "	5 ° 0 ' 0.00000 "
Longitude:	0 ° 0 ' 0.00000 "	180 ° 0 ' 0.00000 "

Nem casos como o seguint

Latitude:	0	*Deg.*	0	*Min.*	0	*Sec.*
Longitude:	0	*Deg.*	0	*Min.*	0	*Sec.*
Latitude:	0	*Deg.*	0	*Min.*	0	*Sec.*
Longitude:	179	*Deg.*	25	*Min.*	0	*Sec.*

Latitude (Pt 1):	0 deg	0 min	0 sec
Longitude (Pt 1):	0 deg	0 min	0 sec
Latitude (Pt 2):	0 deg	0 min	0 sec
Longitude (Pt 2):	179 deg	25 min	0 sec

se values are correct, press "Submit Data" to receive the results.

Submit Data Reset Data

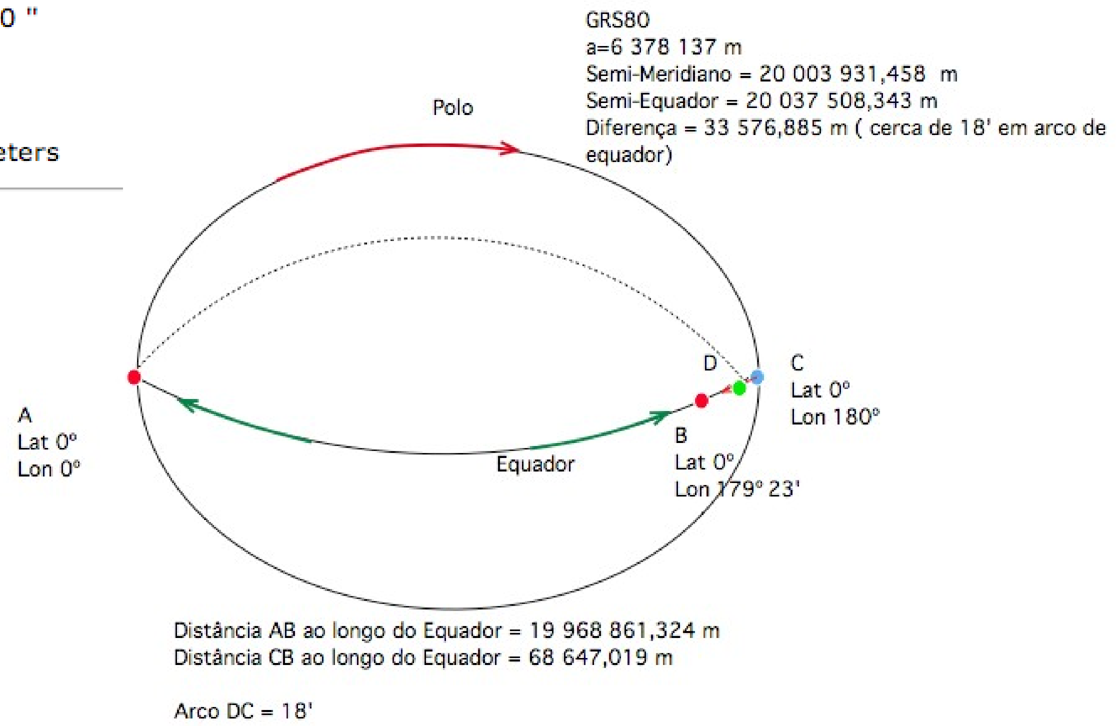
Limitações e casos particulares

GDA Vincenty Calculation Results (Inverse)

Location:	POINT I	POINT II
Name:	A	B
Latitude:	0 ° 0 ' 0.00000 "	0 ° 0 ' 0.00000 "
Longitude:	0 ° 0 ' 0.00000 "	179 ° 23 ' 0.00000 "
Forward Azimuth:		90 ° 0 ' 0.00 "
Reverse Azimuth:		270 ° 0 ' 0.00 "
Ellipsoidal Distance:		19968861.324 meters

nother calculation

omments & Suggestions



VI Conferência Nacional de CARTOGRAFIA e GEODESIA

Conclusões

1. A integração numérica funciona sem qualquer problema nos casos que não apresentam Apex;
2. Nos casos com Apex é necessário empregar o maior número possível de pontos de interpolação e seccionar a geodésica num grande nº de intervalos;
3. É possível melhorar o sistema de convergência substancialmente;
4. A interpolação numérica pode resolver os casos especiais nas zonas de indecisão;
5. É fácil gerar sequências de pontos de passagem.

VI Conferência Nacional de CARTOGRAFIA e GEODESIA

Obrigado pela Vossa Atenção.