

# GRAFOS DE VIZINHANÇAS CONCEPTUAIS PARA RELAÇÕES TOPOLÓGICAS ENTRE LINHAS EM $R^2$

Rui Reis<sup>1</sup>; Max Egenhofer<sup>2</sup> e João Matos<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Centro para a Exploração e Gestão de Informação Geográfica, Instituto Geográfico Português, Rua Artilharia Um, 107, 1099-052 Lisboa, Portugal

<sup>2</sup> National Center for Geographic Information and Analysis, Department of Spatial Information Science and Engineering and Department of Computer Science, University of Maine, Orono, ME 04469-5711, USA

<sup>3</sup> Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal

([ruireis@igeo.pt](mailto:ruireis@igeo.pt); [max@spatial.maine.edu](mailto:max@spatial.maine.edu) e [jmatos@civil.ist.utl.pt](mailto:jmatos@civil.ist.utl.pt))

---

## RESUMO

Os grafos de vizinhanças conceptuais modelam as transições possíveis entre relações espaciais sem passagem por relações intermédias, isto é, modelam as transições directas entre relações espaciais em situações de mudança contínua. Os nós do grafo representam as relações envolvidas e cria-se um arco, ligando dois nós, sempre que for possível uma transição directa entre duas relações.

Nesta comunicação estudam-se dois modelos alternativos para a construção de grafos de vizinhanças conceptuais para relações topológicas entre linhas. O modelo mais simples, chamado modelo rígido, baseia-se na contagem das diferenças entre as entradas nas matrizes das nove intersecções representando as relações. O modelo alternativo é designado modelo das transições suaves. Neste modelo uma transição é permitida se ela for resultante de uma deformação contínua a partir da relação original.

Após a criação dos grafos de vizinhanças conceptuais obtidos por aplicação de cada um dos modelos estes são comparados. Desta comparação conclui-se que embora, globalmente, haja muita concordância entre os resultados de um e de outro modelo, o modelo das transições suaves é mais completo, isto é, modela mais transições, que o modelo rígido.

---

## 1. Introdução

Numa situação de mudança contínua, a transição entre duas relações topológicas pode não ser possível directamente sem primeiro passar por uma ou mais relações intermédias. Por exemplo dadas duas áreas é impossível uma transição directa entre a situação de disjunção (disjoint) e a situação em que uma área inclui a outra (contains). A transição entre estas duas situações (Figura 1) envolve as situações em que as fronteiras se tocam mas os interiores são disjuntos (meet), seguida da situação em que os interiores se sobrepõem (overlap) a que se segue a situação em que as fronteiras se tocam e o interior de uma inclui completamente o interior da outra (covers) e, finalmente, desta situação é possível uma transição directa para contains. Assim, temos a seguinte sequência de relações topológicas: disjoint, meet, overlap, covers e contains.

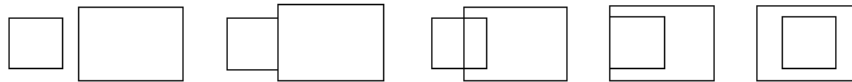


Figura 1: Sequência de relações topológicas entre duas áreas: transição de disjoint para contains.

Duas relações são conceptualmente vizinhas se existir uma transição directa entre elas numa situação de mudança contínua. Os grafos de vizinhanças conceptuais modelam as transições possíveis entre relações espaciais sem passagem por relações intermédias, isto é, modelam as transições directas entre relações espaciais em situações de mudança contínua. Os nós do grafo representam as relações envolvidas. Os arcos, ligando os nós, criam-se sempre que for possível uma transição directa entre duas relações. Numa situação de mudança contínua, se observarmos uma relação topológica entre dois objectos o grafo de vizinhanças conceptuais permite-nos determinar quais as relações topológicas que lhe podem suceder. Uma sequência de transições entre relações corresponde a um caminho no grafo de vizinhanças conceptuais. Por exemplo, a sequência de relações entre disjoint e contains, entre duas áreas, corresponde a um caminho começando no

topo do grafo (Figura 2) e que na relação overlap segue pelo ramo direito do grafo até atingir contains.

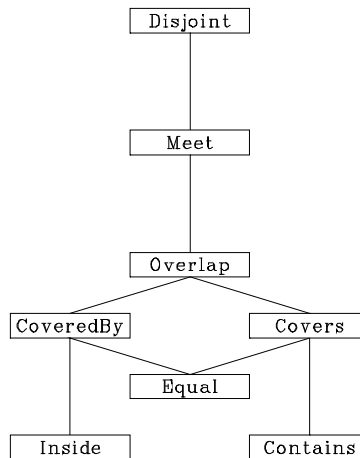


Figura 2: Grafo de vizinhanças conceituais para relações topológicas entre áreas em  $R^2$  (Egenhofer e Al-Taha, 1992).

O conceito de grafo de vizinhanças conceituais foi introduzido por Freksa (1992) para as relações entre intervalos temporais. Desde então o estudo das vizinhanças conceituais e elaboração dos respectivos grafos faz parte integrante do estudo das relações espaciais. Entre outros, foram introduzidos grafos de vizinhanças conceituais para relações topológicas entre áreas em  $R^2$  (Egenhofer e Al-Taha, 1992), para relações topológicas entre áreas em  $Z^2$  (Egenhofer e Sharma, 1993), para relações topológicas entre linhas e áreas (Egenhofer e Mark, 1995), para relações topológicas entre rectângulos englobantes mínimos, *convex hulls* e regiões com fronteira alargada (Clementini e Di Felice, 1997), para a orientação de duas linhas no plano (Schlieder, 1995), para direcções (Goyal, 2000), etc.

Enquanto que as vizinhanças conceituais para relações topológicas entre áreas (Egenhofer and Al-Taha, 1992) e entre linhas e áreas (Egenhofer and Mark, 1995) foram usadas, entre outros, como base para interrogações espaciais de semelhança (Egenhofer, 1997) o grafo para relações entre linhas nunca foi apresentado. Sendo as relações entre linhas importantes para a avaliação e comparação de redes e caminhos em aplicações de SIG impõe-se o seu estudo nomeadamente das vizinhanças conceituais para relações topológicas.

Nesta comunicação estuda-se a criação de grafos de vizinhanças conceituais para relações topológicas entre linhas usando-se dois modelos alternativos. Um, chamado modelo rígido, baseia-se na semelhança entre relações topológicas. O outro, chamado modelo das transições suaves, baseia-se no conhecimento acerca das transições que, em situações de mudança contínua, podem existir entre relações. A abordagem global baseia-se no raciocínio espacial qualitativo, nomeadamente, no formalismo das nove intersecções para a representação de relações topológicas e nos diferentes métodos usados para a criação de grafos de vizinhanças conceituais.

A principal contribuição é a criação de dois grafos de vizinhanças conceituais para relações topológicas entre linhas. Da comparação dos resultados conclui-se que o grafo obtido com o modelo das transições suaves é mais completo que o grafo obtido com o modelo rígido.

Esta comunicação está estruturada do seguinte modo: Na secção 2 apresenta-se o formalismo das nove intersecções para a representação de relações topológicas e as 33 relações entre linhas identificadas com este formalismo. Nas duas secções seguintes criam-se os grafos de vizinhanças conceituais, primeiro usando o modelo rígido (Secção 3) e depois usando o modelo das transições suaves (Secção 4). Na secção 5 comparam-se os dois grafos. Por fim na secção 6 tiram-se conclusões e discute-se trabalho futuro.

## 2. Trabalho Relacionado

O formalismo das nove intersecções foi introduzido por Egenhofer e Herring (1991) para descrever as relações topológicas entre dois objectos A e B. Considera-se cada objecto dividido em três partes, nomeadamente, o seu interior, a sua fronteira e o seu exterior. Este formalismo usa uma

matriz,  $I_n$ , de  $3 \times 3$ , chamada matriz das nove intersecções, para registar as intersecções entre interiores,  $^\circ$ , fronteiras,  $\partial$ , e exteriores (complementos),  $^-$ . Cada célula da matriz regista a existência ou ausência de intersecção entre duas partes.

$$I_n(A, B) = \begin{pmatrix} A^\circ \cap B^\circ & A^\circ \cap \partial B & A^\circ \cap B^- \\ \partial A \cap B^\circ & \partial A \cap \partial B & \partial A \cap B^- \\ A^- \cap B^\circ & A^- \cap \partial B & A^- \cap B^- \end{pmatrix} \quad (1)$$

Na matriz das nove intersecções cada célula pode ser representada a branco se corresponder a uma intersecção vazia e a preto se houver intersecção entre duas partes (interior, fronteira ou exterior).

Entre duas linhas simples em  $\mathbb{R}^2$  existem 33 relações topológicas possíveis (Egenhofer e Herring, 1991) cujas matrizes das nove intersecções estão representadas na figura 3.

O formalismo das nove intersecções foi usado anteriormente como base para a construção dos grafos de vizinhanças conceptuais para relações topológicas entre áreas e entre linhas e áreas. Nesta comunicação usa-se este formalismo como base para a construção dos grafos de vizinhanças conceptuais para relações topológicas entre linhas.

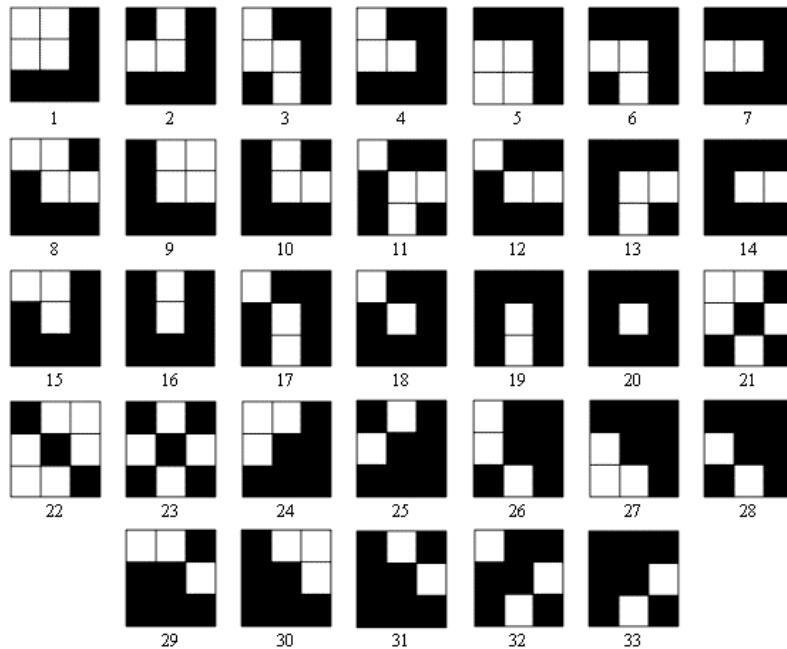


Figura 3: Matrizes das nove intersecções para as 33 relações topológicas possíveis entre linhas em  $\mathbb{R}^2$ .

### 3. Modelo Rígido

Com base no formalismo das nove intersecções Egenhofer e Al-Taha (1992) introduziram o conceito de distância topológica. A distância topológica entre duas relações é, por definição, igual à soma dos valores absolutos das diferenças entre entradas correspondentes na matriz das nove intersecções. Isto é, dadas duas relações topológicas representadas pelas matrizes das nove intersecções  $M$  e  $N$ , onde a existência de intersecção está codificada com 1 e a ausência de intersecção por 0, a distância topológica entre as duas relações é dada por:

$$TD = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |M_{ij} - N_{ij}|. \quad (2)$$

A distância topológica mede o grau de semelhança entre duas relações topológicas e varia entre zero e oito. Uma distância topológica igual a zero significa que as relações topológicas são iguais e quanto mais elevado for o seu valor tanto menos semelhantes são as relações.

Para se obter o grafo de vizinhanças conceptuais entre relações topológicas para linhas começa-se por calcular a matriz de distâncias topológicas (Figura 4) entre todas as 33 relações topológicas possíveis entre duas linhas simples.

|    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 |   |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 1  | 0 | 1 | 2 | 1 | 4 | 3 | 2 | 2 | 4 | 3  | 4  | 3  | 5  | 4  | 1  | 2  | 3  | 2  | 4  | 3  | 3  | 6  | 4  | 1  | 2  | 3  | 5  | 4  | 3  | 5  | 4  | 5  | 6  |   |
| 2  | 1 | 0 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 3 | 2  | 5  | 4  | 4  | 3  | 2  | 1  | 4  | 3  | 3  | 2  | 4  | 5  | 3  | 2  | 1  | 4  | 4  | 3  | 4  | 4  | 3  | 6  | 5  |   |
| 3  | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 4 | 6 | 5  | 2  | 3  | 3  | 4  | 3  | 4  | 1  | 2  | 2  | 3  | 3  | 6  | 4  | 3  | 4  | 1  | 3  | 2  | 5  | 7  | 6  | 3  | 4  |   |
| 4  | 1 | 2 | 1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 3 | 5 | 4  | 3  | 2  | 4  | 3  | 2  | 3  | 2  | 1  | 3  | 2  | 4  | 7  | 5  | 2  | 3  | 2  | 4  | 3  | 4  | 6  | 5  | 4  | 5  |   |
| 5  | 4 | 3 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 6 | 6 | 5  | 4  | 5  | 3  | 4  | 5  | 4  | 3  | 4  | 2  | 3  | 5  | 4  | 4  | 5  | 4  | 3  | 1  | 2  | 7  | 7  | 6  | 5  | 4  |   |
| 6  | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 5 | 5 | 4  | 3  | 4  | 2  | 3  | 4  | 3  | 2  | 3  | 1  | 2  | 4  | 5  | 3  | 4  | 3  | 2  | 2  | 1  | 6  | 6  | 5  | 4  | 3  |   |
| 7  | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 4 | 4 | 3  | 4  | 3  | 3  | 2  | 3  | 2  | 3  | 2  | 2  | 1  | 5  | 6  | 4  | 3  | 2  | 3  | 3  | 2  | 5  | 5  | 4  | 5  | 4  |   |
| 8  | 2 | 3 | 4 | 3 | 6 | 5 | 4 | 0 | 2 | 1  | 2  | 1  | 3  | 2  | 1  | 2  | 3  | 2  | 4  | 3  | 3  | 6  | 4  | 3  | 4  | 5  | 7  | 6  | 1  | 3  | 2  | 3  | 4  |   |
| 9  | 4 | 3 | 6 | 5 | 6 | 5 | 4 | 2 | 0 | 1  | 4  | 3  | 3  | 2  | 3  | 2  | 5  | 4  | 4  | 3  | 5  | 4  | 4  | 5  | 4  | 7  | 7  | 6  | 3  | 1  | 2  | 5  | 4  |   |
| 10 | 3 | 2 | 5 | 4 | 5 | 4 | 3 | 1 | 1 | 0  | 3  | 2  | 2  | 1  | 2  | 1  | 4  | 3  | 3  | 2  | 4  | 5  | 3  | 4  | 3  | 6  | 6  | 5  | 2  | 2  | 1  | 4  | 3  |   |
| 11 | 4 | 5 | 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | 2 | 4 | 3  | 0  | 1  | 1  | 2  | 3  | 4  | 1  | 2  | 2  | 3  | 3  | 6  | 4  | 5  | 6  | 3  | 5  | 4  | 3  | 5  | 4  | 1  | 2  |   |
| 12 | 3 | 4 | 3 | 2 | 5 | 4 | 3 | 1 | 3 | 2  | 1  | 0  | 2  | 1  | 2  | 3  | 2  | 1  | 3  | 2  | 4  | 7  | 5  | 4  | 5  | 4  | 6  | 5  | 2  | 4  | 3  | 2  | 3  |   |
| 13 | 5 | 4 | 3 | 4 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2  | 1  | 2  | 0  | 1  | 4  | 3  | 2  | 3  | 1  | 2  | 4  | 5  | 3  | 6  | 5  | 4  | 4  | 3  | 4  | 3  | 2  | 1  |    |   |
| 14 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1  | 2  | 1  | 1  | 0  | 3  | 2  | 3  | 2  | 2  | 1  | 5  | 6  | 4  | 5  | 4  | 5  | 5  | 4  | 3  | 3  | 2  | 3  | 2  |   |
| 15 | 1 | 2 | 3 | 2 | 5 | 4 | 3 | 1 | 3 | 2  | 3  | 2  | 4  | 3  | 0  | 1  | 2  | 1  | 3  | 2  | 4  | 7  | 5  | 2  | 3  | 4  | 6  | 5  | 2  | 4  | 3  | 4  | 5  |   |
| 16 | 2 | 1 | 4 | 3 | 4 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1  | 4  | 3  | 3  | 2  | 1  | 0  | 3  | 2  | 2  | 1  | 5  | 6  | 4  | 3  | 2  | 5  | 4  | 3  | 2  | 5  | 4  | 3  | 2  | 5 |
| 17 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 5 | 4  | 1  | 2  | 2  | 3  | 2  | 3  | 0  | 1  | 1  | 2  | 4  | 7  | 5  | 4  | 5  | 2  | 4  | 3  | 4  | 6  | 5  | 2  | 3  |   |
| 18 | 2 | 3 | 2 | 1 | 4 | 3 | 2 | 2 | 4 | 3  | 2  | 1  | 3  | 2  | 1  | 2  | 1  | 0  | 2  | 1  | 5  | 8  | 6  | 3  | 4  | 3  | 5  | 4  | 3  | 5  | 4  | 3  | 4  |   |
| 19 | 4 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 4 | 4 | 3  | 2  | 3  | 1  | 2  | 3  | 2  | 1  | 2  | 0  | 1  | 5  | 6  | 4  | 5  | 4  | 3  | 3  | 2  | 5  | 5  | 4  | 3  | 2  |   |
| 20 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 3 | 2  | 3  | 2  | 2  | 1  | 2  | 1  | 2  | 1  | 1  | 0  | 6  | 7  | 5  | 4  | 3  | 4  | 4  | 3  | 4  | 4  | 3  | 4  | 3  |   |
| 21 | 3 | 4 | 3 | 4 | 5 | 4 | 5 | 3 | 5 | 4  | 3  | 4  | 4  | 5  | 4  | 5  | 4  | 5  | 5  | 6  | 0  | 3  | 1  | 2  | 3  | 2  | 4  | 3  | 2  | 4  | 3  | 2  | 3  |   |
| 22 | 6 | 5 | 6 | 7 | 4 | 5 | 6 | 6 | 4 | 5  | 6  | 7  | 5  | 6  | 7  | 6  | 7  | 8  | 6  | 7  | 3  | 0  | 2  | 5  | 4  | 5  | 3  | 4  | 5  | 3  | 4  | 5  | 4  |   |
| 23 | 4 | 3 | 4 | 5 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 3  | 4  | 5  | 3  | 4  | 5  | 4  | 5  | 6  | 4  | 5  | 1  | 2  | 0  | 3  | 2  | 3  | 3  | 2  | 3  | 3  | 2  | 3  | 2  |   |
| 24 | 1 | 2 | 3 | 2 | 5 | 4 | 3 | 3 | 5 | 4  | 4  | 5  | 6  | 5  | 2  | 3  | 4  | 3  | 5  | 4  | 2  | 5  | 3  | 0  | 1  | 2  | 4  | 3  | 2  | 4  | 3  | 4  | 5  |   |
| 25 | 2 | 1 | 4 | 3 | 4 | 3 | 2 | 4 | 4 | 3  | 6  | 5  | 5  | 4  | 3  | 2  | 5  | 4  | 4  | 3  | 3  | 4  | 2  | 1  | 0  | 3  | 3  | 2  | 3  | 3  | 2  | 5  | 4  |   |
| 26 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 5 | 7 | 6  | 3  | 4  | 4  | 5  | 4  | 5  | 2  | 3  | 3  | 4  | 2  | 5  | 3  | 2  | 3  | 0  | 2  | 1  | 4  | 6  | 5  | 2  | 3  |   |
| 27 | 5 | 4 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 7 | 7 | 6  | 5  | 6  | 4  | 5  | 6  | 5  | 4  | 5  | 3  | 4  | 4  | 3  | 3  | 4  | 3  | 2  | 0  | 1  | 6  | 6  | 5  | 4  | 3  |   |
| 28 | 4 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 6 | 6 | 5  | 4  | 5  | 3  | 4  | 5  | 4  | 3  | 4  | 2  | 3  | 3  | 4  | 2  | 3  | 2  | 1  | 1  | 0  | 5  | 5  | 4  | 3  | 2  |   |
| 29 | 3 | 4 | 5 | 4 | 7 | 6 | 5 | 1 | 3 | 2  | 3  | 2  | 4  | 3  | 2  | 3  | 4  | 3  | 5  | 4  | 2  | 5  | 3  | 2  | 3  | 4  | 6  | 5  | 0  | 2  | 1  | 2  | 3  |   |
| 30 | 5 | 4 | 7 | 6 | 7 | 6 | 5 | 3 | 1 | 2  | 5  | 4  | 4  | 3  | 4  | 3  | 6  | 5  | 5  | 4  | 4  | 3  | 3  | 4  | 3  | 6  | 6  | 5  | 2  | 0  | 1  | 4  | 3  |   |
| 31 | 4 | 3 | 6 | 5 | 6 | 5 | 4 | 2 | 2 | 1  | 4  | 3  | 3  | 2  | 3  | 2  | 5  | 4  | 4  | 3  | 3  | 4  | 2  | 3  | 2  | 5  | 5  | 4  | 1  | 1  | 0  | 3  | 2  |   |
| 32 | 5 | 6 | 3 | 4 | 5 | 4 | 5 | 3 | 5 | 4  | 1  | 2  | 2  | 3  | 4  | 5  | 2  | 3  | 3  | 4  | 2  | 5  | 3  | 4  | 5  | 2  | 4  | 3  | 2  | 4  | 3  | 0  | 1  |   |
| 33 | 6 | 5 | 4 | 5 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 3  | 2  | 3  | 1  | 2  | 5  | 4  | 3  | 4  | 2  | 3  | 3  | 4  | 2  | 5  | 4  | 3  | 3  | 2  | 3  | 3  | 2  | 1  | 0  |   |

Figura 4: Distâncias topológicas para relações topológicas entre linhas.

Existem várias possibilidades de se construir o grafo de vizinhanças conceptuais a partir da matriz de distâncias topológicas. Uma possibilidade é considerar, para cada relação, a distância topológica mínima. Uma outra possibilidade consiste em usar a distância topológica 1. O grafo, apresentado na figura 5, obtém-se usando esta última hipótese, isto é, obtém-se unindo as relações para as quais a distância topológica é igual a 1.

Na figura 5 não estão representadas as relações 21, 22 e 23 pois estas não têm ligação com o restante grafo. Este facto pode ser constatado por consulta da matriz de distâncias topológicas. Com efeito para a relação 22 todas as distâncias topológicas são superiores a 1 e portanto não é criada nenhuma ligação com as demais relações. As relações 21 e 23, embora estejam ligadas entre si, também não se encontram ligadas com mais nenhuma relação.

Diz-se que duas relações  $r_x$  e  $r_y$  são inversas se se verificar que  $A_{r_x B}$  e  $B_{r_y A}$ . Por exemplo, as relações  $r_{27}$  e  $r_{30}$  são inversas porque se verifica que quando  $A_{r_{27} B}$  então temos  $B_{r_{30} A}$ . No grafo, as relações dispostas simetricamente de um lado e do outro de um plano passando pelas relações 1, 2, 11, 13, 18 e 20 correspondem a relações inversas. Existem 10 pares de relações inversas: 3-8, 4-15, 5-9, 6-10, 7-16, 17-12, 19-14, 26-29, 27-30 e 28-31.

O grafo está disposto em três planos horizontais. As relações que ocupam o plano inferior e as que ocupam o plano intermédio, desde que ligadas por um lado vertical, apenas diferem na intersecção entre interiores. Com efeito, as relações que ocupam o plano inferior têm a intersecção entre interiores vazia enquanto que nas relações que ocupam o plano intermédio existe intersecção entre interiores. As relações, ligadas por um lado vertical, que ocupam o plano superior diferem das relações que ocupam o plano intermédio pelas intersecções entre exterior e interior, do lado esquerdo do plano de simetria (plano que passa pelas relações 1, 2, 11, 13, 18 e 20), e entre interior e exterior do lado direito deste plano. No plano intermédio estas intersecções existem enquanto que no plano superior elas são vazias.

O grafo também se encontra organizado segundo oito planos verticais, três de trás para a frente e cinco da esquerda para a direita. A diferença entre as relações no plano vertical de trás e as relações no plano vertical do meio está na intersecção entre fronteira e interior. Esta intersecção existe no

plano do meio mas é vazia no plano de trás. Por outro lado, existe uma intersecção entre fronteira e exterior no plano do meio mas no plano da frente esta intersecção é vazia.

As diferenças que podem ser distinguidas nos cinco planos verticais, da esquerda para a direita, são: existência de intersecção entre fronteiras no primeiro plano mas não no segundo, existência de intersecção entre exterior e fronteira no terceiro plano mas não no segundo, existência de intersecção entre interior e fronteira no terceiro plano mas não no quarto e, finalmente, existência de intersecção entre fronteiras no quinto plano mas não no quarto.

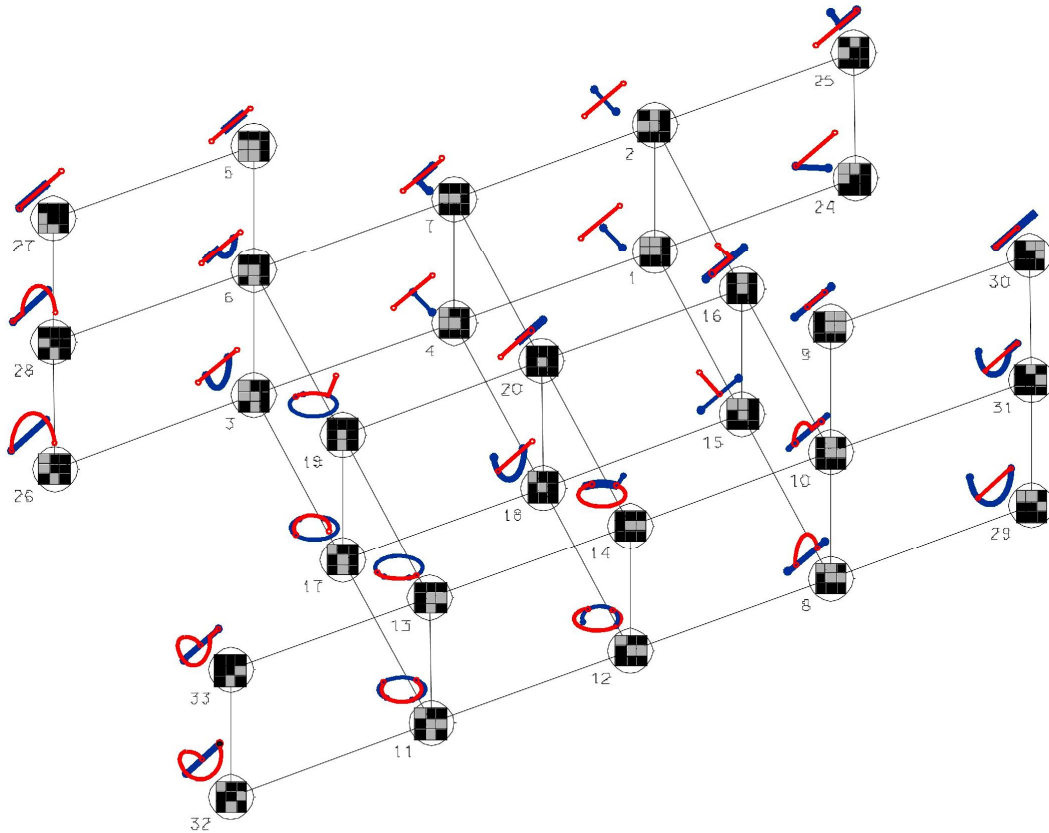


Figura 5: Grafo de vizinhanças conceptuais para relações topológicas entre linhas usando o modelo rígido.

#### 4. Modelo das Transições Suaves

O chamado modelo das transições suaves foi originalmente introduzido por Egenhofer e Mark (1995) para modelar as vizinhanças conceptuais para relações topológicas entre linhas e áreas registrando-se o movimento dos nós de uma linha e do seu interior em relação a uma área. Este modelo, no entanto, não se pode aplicar para modelar as vizinhanças conceptuais para relações topológicas entre linhas pois muitas transições admissíveis não são incluídas. Isto resulta do facto das relações de adjacência entre interiores, fronteiras e exteriores serem diferentes num caso e no

outro. Isto é, para uma região, R, tem-se: 
$$\begin{cases} adj(R^{\circ}) = \partial R \\ adj(\partial R) = R^{\circ} \wedge R^{-} \\ adj(R^{-}) = \partial R \end{cases}$$

No caso de uma linha, L, tem-se: 
$$\begin{cases} adj(L^{\circ}) = \partial L \wedge L^{-} \\ adj(\partial L) = L^{\circ} \wedge L^{-} \\ adj(L^{-}) = L^{\circ} \wedge \partial L \end{cases}$$

Por forma a ser aplicável a linhas este modelo tem que ser alterado por forma a levarem-se em linha de conta estas diferenças.

Seja a extensão da parte p, extensão(p), o numero de intersecções não vazias entre p e as três partes (interior, fronteira e exterior) de outro objecto. Assim, a extensão da fronteira de uma linha é 1 ou

2. Tem-se  $extensão(\partial)=1$  se ambos os nós intersectarem a mesma parte da outra linha e  $extensão(\partial)=2$  se os nós intersectarem partes diferentes da outra linha. No que se segue representa-se a existência de intersecção por  $\neg\emptyset$ , a ausência de intersecção por  $\emptyset$  e a intersecção da parte  $i$  com a parte  $j$  por  $[i, j]$  o que corresponde à linha  $i$  e coluna  $j$  da matriz das nove intersecções. O modelo das transições suaves pode ser formalizado por um conjunto de seis condições, sendo duas aplicáveis a fronteiras, duas aplicáveis a interiores e duas a exteriores.

A primeira condição consiste em acrescentar intersecções da fronteira nas partes adjacentes à intersecção existente entre a fronteira de uma linha e uma parte da outra linha. Tem-se então:

[Condição 1] Se  $extensão(\partial)=1: \forall i \in \{^{\circ}, \partial, ^{-}\}; ([\partial, i] = \neg\emptyset) : [\partial, adjacente(i)] = \neg\emptyset$ .

[Condição 2] Se  $extensão(\partial)=2$ :

$\forall i, j \in \{^{\circ}, \partial, ^{-}\}; i \neq j; ([\partial, i] = \neg\emptyset \wedge [\partial, j] = \neg\emptyset) \exists k : k \neq i, j \wedge k \in \{^{\circ}, \partial, ^{-}\}$ :

$$\begin{cases} [\partial, i] = \neg\emptyset \wedge [\partial, j] = \emptyset \wedge [\partial, k] = \emptyset \\ [\partial, i] = \emptyset \wedge [\partial, j] = \neg\emptyset \wedge [\partial, k] = \emptyset \\ [\partial, i] = \neg\emptyset \wedge [\partial, j] = \emptyset \wedge [\partial, k] = \neg\emptyset \\ [\partial, i] = \emptyset \wedge [\partial, j] = \neg\emptyset \wedge [\partial, k] = \neg\emptyset \end{cases}$$

Estas quatro sub-condições correspondem a reduzir-se a intersecção da fronteira com as duas partes que originalmente tinham intersecção com ela por forma a intersectar apenas uma das partes. Simultaneamente, nas duas últimas sub-condições, cria-se uma intersecção com a parte que originalmente não tinha intersecção com a fronteira

As condições aplicáveis às intersecções de interiores correspondem a acrescentar intersecções com as partes adjacentes à intersecção do interior da linha com a outra linha e a reduzir a intersecção do interior da linha com as partes da outra linha.

[Condição 3]  $\forall i \in \{^{\circ}, \partial, ^{-}\}; ([^{\circ}, i] = \neg\emptyset) : [^{\circ}, adjacente(i)] = \neg\emptyset$ .

[Condição 4a] Se  $extensão(^{\circ}) = 2: \forall i \in \{^{\circ}, \partial, ^{-}\}; ([^{\circ}, i] = \neg\emptyset) : [^{\circ}, i] = \emptyset$ .

[Condição 4b] Se  $extensão(^{\circ}) = 3: \forall i \in \{^{\circ}, \partial, ^{-}\}; i \neq \partial : [^{\circ}, i] = \emptyset$ .

Seguem-se duas condições envolvendo os exteriores:

[Condição 5] Se  $extensão(^{\circ}) = 3$ , mudar o valor da intersecção do exterior de uma linha com o interior da outra linha,  $[-, ^{\circ}]$ .

[Condição 6] Se  $extensão(^{\circ}) > 1$ , mudar o valor da intersecção do exterior de uma linha com a fronteira da outra linha,  $[-, \partial]$ .

A aplicação da condição 1 à relação 2 dá origem às relações 16 e 25 (Figura 6). A transição da relação 2 para a relação 16 corresponde a mover-se um nó da fronteira de uma linha do exterior para o interior da outra linha. A transição da relação 2 para a relação 25 corresponde a mover-se um nó da fronteira de uma linha do exterior para a fronteira da outra linha.

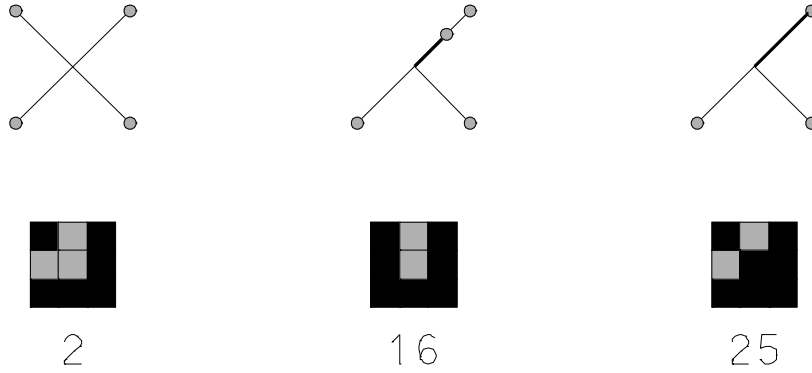


Figura 6: A aplicação da condição 1 à relação 2.

Aplicando a condição 2 à relação 24 dá origem às relações 1, 15, 29 (Figura 7) e a uma relação impossível de se realizar. Neste caso tem-se  $i = \partial$ ,  $j = -$  e portanto  $k = \circ$ . A aplicação da condição 2 dá:

$$\begin{cases} [\partial, \partial] = \neg\emptyset; [\partial, -] = \emptyset; [\partial, \circ] = \emptyset \rightarrow \text{Relação Impossível} \\ [\partial, \partial] = \emptyset; [\partial, -] = \neg\emptyset; [\partial, \circ] = \emptyset \rightarrow \text{Relação 1} \\ [\partial, \partial] = \neg\emptyset; [\partial, -] = \emptyset; [\partial, \circ] = \neg\emptyset \rightarrow \text{Relação 29} \\ [\partial, \partial] = \emptyset; [\partial, -] = \neg\emptyset; [\partial, \circ] = \neg\emptyset \rightarrow \text{Relação 15} \end{cases}$$

A transição da relação 24 para a relação 1 corresponde a mover-se um nó da fronteira de uma linha da fronteira para o exterior da outra linha. A transição da relação 24 para a relação 15 corresponde a mover-se um nó da fronteira de uma linha da fronteira para o interior da outra linha. Finalmente, a transição da relação 24 para a relação 29 corresponde a mover-se um nó da fronteira de uma linha do exterior para o interior da outra linha.

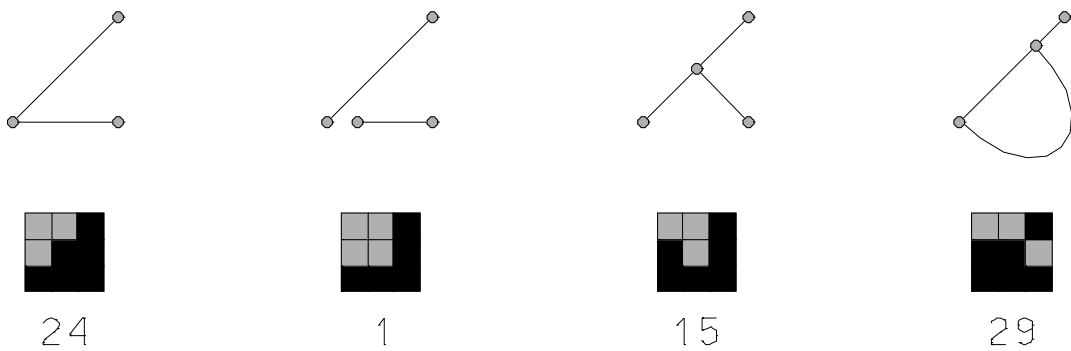


Figura 7: A aplicação da condição 2 à relação 24.

A condição 3 corresponde a acrescentar intersecções nas partes adjacentes à intersecção do interior de uma linha com a outra linha. A aplicação da condição 3 à relação 1 dá origem às relações 2 e 4 (Figura 8). Na relação 1 o interior de uma linha intersecta o exterior da outra linha. As partes adjacentes ao exterior são o interior e a fronteira. Assim, a transição da relação 1 para a relação 2 corresponde a mover-se o interior de uma linha por forma a intersectar o interior da outra linha e a transição da relação 1 para a relação 4 corresponde a mover-se o interior de uma linha por forma a intersectar a fronteira da outra linha.

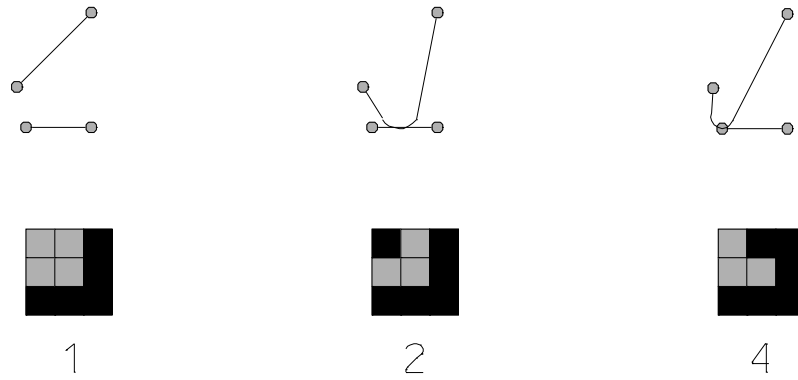


Figura 8: A aplicação da condição 3 à relação 1.

A condição 4 corresponde a reduzir-se a intersecção do interior de uma linha com as partes envolvidas na intersecção com a outra linha. Esta condição aplicada à relação 10 dá origem às relações 8 e 9 (Figura 9). A transição da relação 10 para a relação 8 corresponde a mover-se o interior de uma linha completamente para o exterior da outra linha. A transição da relação 10 para a relação 9 corresponde a mover-se o interior de uma linha completamente para o interior da outra linha.

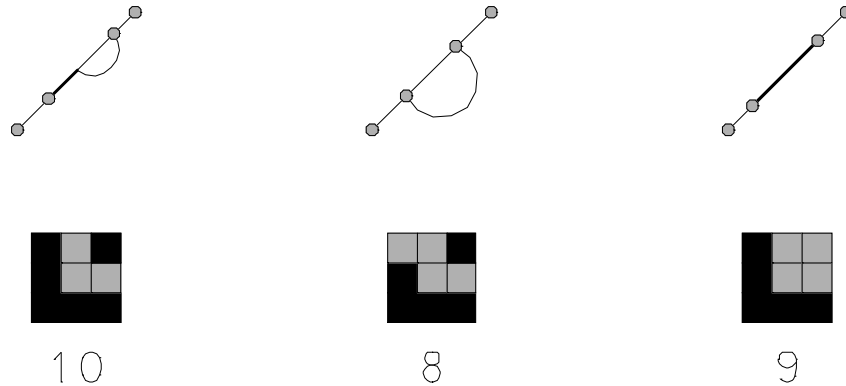


Figura 9: A aplicação da condição 4 à relação 6.

A condição 5 corresponde a mudar-se a intersecção do exterior de uma linha com o interior da outra linha. Esta condição aplicada à relação 5 dá origem à relação 6 (Figura 10) e corresponde a mover-se parcialmente o interior de uma linha de forma a que intersecte o interior e o exterior da outra linha.

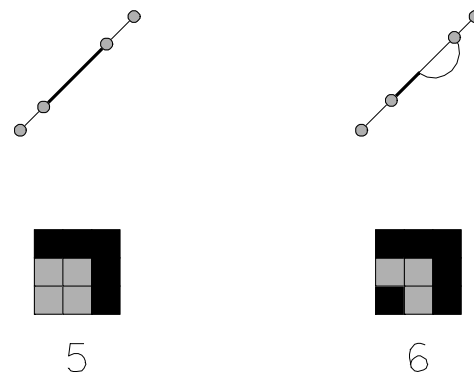


Figura 10: A aplicação da condição 5 à relação 5.

A condição 6 corresponde a mudar-se a intersecção entre o exterior de uma linha e a fronteira da outra linha. A aplicação desta condição à relação 3 dá origem à relação 4 (Figura 11) e corresponde a mover-se um nó da fronteira de uma linha do interior para o exterior da outra linha.

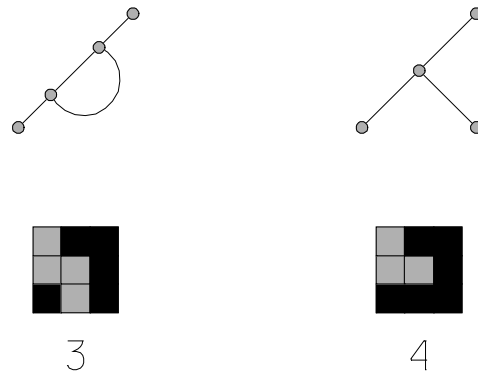


Figura 11: A aplicação da condição 6 à relação 3.

O grafo de vizinhanças conceituais para relações topológicas entre linhas obtém-se aplicando as seis condições do modelo a todas as 33 relações possíveis entre linhas simples. Deste modo obtém-se para cada relação a listagem das relações para as quais há transições possíveis. Unindo as relações entre as quais há transições criam-se os arcos do grafo sendo o resultado final apresentado na figura 12. Na figura 12 não estão representadas as relações 21, 22 e 23 pois estas não têm ligação com as demais relações.

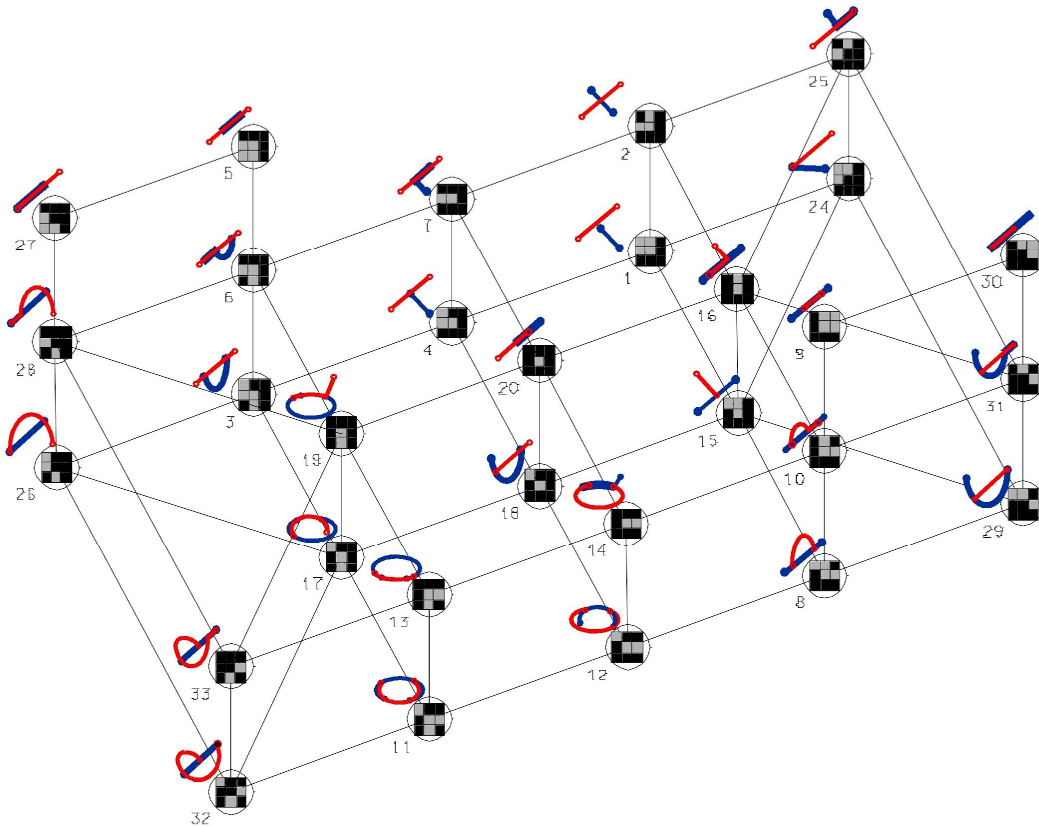


Figura 12: Grafo de vizinhanças conceituais para relações topológicas entre linhas usando o modelo das transições suaves.

## 5. Comparação

O grafo obtido com o modelo rígido é um subconjunto do grafo obtido com o modelo das transições suaves. Isto é, todos os arcos no grafo do modelo rígido existem no grafo do modelo das transições suaves. Há, no entanto, 12 arcos adicionais no modelo das transições suaves que ocorrem nas extremidades esquerda e direita do grafo. Estes arcos adicionais são criados pelas 3ª e 4ª sub-condições da condição 2 e portanto resultam de se reduzir a intersecção da fronteira e, simultaneamente, criar-se uma nova intersecção com a parte que originalmente não havia intersecção.

Os arcos adicionais do modelo das transições suaves introduzem caminhos mais curtos na periferia do grafo. Por exemplo, o caminho mais curto entre as relações 30 e 24 é 6 no grafo do modelo rígido mas é apenas de 3 no grafo do modelo das transições suaves. Outra diferença tem a ver com a cardinalidade dos nodos, isto é, o número de arcos que se ligam a um nó. Enquanto que a cardinalidade máxima é 5 no modelo rígido no modelo das transições suaves há 4 nós com cardinalidade 6.

O grafo obtido usando o modelo das transições suaves é mais completo que o grafo do modelo rígido porque inclui mais transições que devem ser consideradas. Por exemplo, a transição entre as relações 24 e 29, estudada no exemplo de aplicação da condição 2, é uma destas transições que deve ser considerada.

## 6. Conclusões e Trabalho Futuro

Nesta comunicação analisaram-se dois modelos alternativos para a construção de grafos de vizinhanças conceituais para relações topológicas entre linhas. Ambos os modelos têm por base o formalismo das nove intersecções para a representação de relações topológicas.

O modelo rígido, mais simples, baseia-se no conceito de distância topológica que é uma medida de semelhança entre duas relações topológicas. Na base da construção do modelo das transições suaves está a observação das deformações que dão origem a uma alteração da relação topológica.

Os grafos obtidos com ambos os modelos têm a mesma estrutura global mas o grafo obtido por aplicação do modelo das transições suaves tem mais lados, isto é, regista mais transições admissíveis entre relações e portanto é mais completo.

O trabalho futuro envolve a integração das relações 21, 22 e 23 no grafo. Por um lado pode-se usar o modelo rígido adoptando para estas relações distancias topológicas diferentes de 1. Por outro lado pode-se modificar o modelo das transições suaves após se estudarem quais as transições entre relações que ligam estas relações com outras relações do grafo.

## 7. Referências

- Clementini, E. e Di Felice, P. (1997) Approximate Topological Relations. *International Journal of Approximate Reasoning*, 16: 173-204.
- Egenhofer, M. (1997) Query Processing in Spatial-Query-by-Sketch. *Journal of Visual Languages and Computing*, 8 (4): 403-424.
- Egenhofer, M. e Al-Taha, K. (1992) Reasoning about Gradual Changes of Topological Relationships. Em Frank, A.; Campari, I. e Formentini, U. (Eds.) *Theory and Methods of Spatio-Temporal Reasoning in Geographic Space*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 639, Springer-Verlag, pp. 196-219.
- Egenhofer, M. e Herring, J. (1991) Categorizing Binary Topological Relationships Between Regions, Lines and Points in Geographic Databases. Technical Report, Department of Surveying Engineering, University of Maine, Orono, Maine, USA.
- Egenhofer, M. e Mark, D. (1995) Modeling Conceptual Neighborhoods of Topological Line-Region Relations. *International Journal of Geographical Information Systems*, 9 (5):555-565.
- Egenhofer, M. e Sharma, J. (1993) Topological Relations Between Regions in  $R^2$  and  $Z^2$ . Em Abel, D. e Ooi, B.C. (Eds.) *Advances in Spatial Databases-Third International Symposium on Large Spatial Databases, SSD'93*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 692, Springer-Verlag, pp. 316-336.
- Freksa, C. (1992) Temporal reasoning based on semi-intervals. *Artificial Intelligence*, 54: 199-227.
- Goyal, R. (2000) Similarity Assessment for Cardinal Directions Between Extended Objects. PhD Thesis, Department of Spatial Information Science and Engineering, University of Maine, Orono, Maine, USA.
- Schlieder, C. (1995) Reasoning about Ordering. Em Frank, A.U. e Kuhn, W. (Eds.), *Proceedings of COSIT'95, Spatial Information Theory-A Theoretical Basis for GIS*. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 988, Springer-Verlag, pp. 341-350.