

A CONTRIBUIÇÃO DE PEDRO NUNES PARA A PROJEÇÃO CARTOGRÁFICA DE MERCATOR

CASACA, João Manuel Martins¹

Resumo:

A presente comunicação tem por principal objectivo demonstrar a contribuição decisiva de Pedro Nunes para a expressão analítica da projecção cartográfica de Mercator. São também referidas, na comunicação, as relações pessoais entre Pedro Nunes, John Dee e Mercator, as quais permitem presumir, com razoável segurança, que Mercator conhecia os trabalhos de Nunes quando elaborou o seu famoso *mappamundi*.

Preâmbulo

A projecção cartográfica vulgarmente conhecida por projecção de Mercator é assim denominada em homenagem ao notável cartógrafo flamengo Gerardus Mercator - pseudónimo latino de Gerard Kremer (1512-94) - que publicou em Duisburgo, em 1569, um *mappamundi* que intitulou de “*Nova et Aucta Orbis Terrae Descriptio ad Usum Navigantium Emendate Accomodata*”. O *mappamundi* de Mercator foi precursor das actuais cartas náuticas, que representam, por linhas rectas, as linhas de rumo constante da esfera (linhas loxodrómicas), de tal modo que os rumos cartográficos medidos na carta são idênticos aos rumos geográficos correspondentes na esfera.

Um facto pouco conhecido é que o *mappamundi* de Mercator foi elaborado de acordo com um procedimento anteriormente sugerido pelo grande matemático português Pedro Nunes (1502-78). Com efeito, o preceito geométrico destinado a adaptar a carta de marear portuguesa à navegação loxodrómica, subjacente à projecção de Mercator, foi apresentado por Pedro Nunes no seu “Tratado [...] em Defensam da Carta de Marear”, publicado em Lisboa, em 1537, e posteriormente na sua obra “*De Regulis et Instrumentis* [...]”, publicada em Basileia, em 1566.

No “Tratado [...] em Defensam da Carta de Marear”, Pedro Nunes preconizou a substituição da carta quadrada tradicional por uma carta rectangular, onde as imagens dos meridianos fossem alongadas de modo a manter constante a razão entre os comprimentos das imagens dos arcos de meridiano e os comprimentos das imagens dos arcos de paralelo. Usando as ferramentas da Geometria Diferencial, facilmente se verifica que esta condição conduz inequivocamente às actuais fórmulas da projecção de Mercator, o que permite atribuir a paternidade da projecção a Pedro Nunes.

¹ Investigador-coordenador do Laboratório Nacional de Engenharia Civil

As Projecções Cartográficas Quadrada e de Mercator

Designaremos por projecção quadrada a projecção cartográfica que Cláudio Ptolomeu atribuiu a Marino de Tiro (Berggren and Jones 1989), mas que deve remontar a Eratóstenes (Canters and Declair 1989, Snyder 1993). As fórmulas da projecção quadrada são muito simples:

$$\begin{cases} m = \Theta \lambda \\ p = \Theta \varphi \end{cases} \quad (1)$$

onde: i) λ é a longitude, em graus, relativa a um meridiano de referência (o meridiano do Cabo de São Vicente, por exemplo); ii) m é a distância à meridiana (imagem do meridiano de referência das longitudes), em léguas; iii) φ é a latitude, em graus; iv) p é a distância à perpendicular (imagem do Equador); v) Θ é o tamanho do grau de círculo máximo da esfera, em léguas (Casaca 2005).

A projecção quadrada mantém, no plano cartográfico, os comprimentos dos arcos de meridiano (é uma projecção equidistante), mas deforma (amplia) os comprimentos de arco de paralelo proporcionalmente à secante trigonométrica da latitude e representa as linhas loxodrómicas da esfera como linhas curvas no plano cartográfico.

As fórmulas directas da projecção cartográfica de Mercator são semelhantes às fórmulas da projecção quadrada (1), onde a latitude (φ) é substituída por uma latitude acrescida:

$$\varphi_A = \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) \quad (2)$$

A latitude acrescida (φ_A) aumenta progressivamente com a latitude φ , de tal modo que a projecção de Mercator, ao contrário da projecção quadrada, amplia progressivamente os comprimentos dos arcos de meridiano, permitindo que, no plano cartográfico, as linhas loxodrómicas da esfera sejam representadas como linhas rectas, com um rumo cartográfico igual ao rumo geográfico.

As diferenças entre a projecção quadrada e a projecção de Mercator, que são imperceptíveis na vizinhança do Equador, crescem não linearmente com a latitude e tornam-se muito significativas nas latitudes mais elevadas (Casaca 2004).

O Tratado em Defensam da Carta de Marear e Edward Wright

Embora o “Tratado em Defensam da Carta de Marear” seja um texto interessantíssimo, merecedor de uma maior atenção, vamos recorrer a dois excertos para comprovar a tese que relaciona Pedro Nunes com a projecção de Mercator.

Num dos primeiros parágrafos do Tratado, Nunes (2005) rejeita as projecções não rectangulares, i. e., aquelas em que as imagens dos meridianos e paralelos não constituem uma tesselação

rectangular, e defende a carta (de marear) quadrada, desenvolvida pelos portugueses, contra outras projecções, tais como as apresentadas por Cláudio Ptolomeu na sua Geografia (Berggren and Jones 2000):

“As nossas cartas sam muito diferentes dellas [das cartas dos antigos]: ... E esta he a razam porque foy necessario: serem os rumos de norte sul: e quaes quer outros de hum mesmo nome: linhas direitas equidistantes. Nem se pode fazer de linhas curuas: nenhum planisferio que tanto conforme seja ao nosso modo de nauegar como he a carta [quadrada de marear]. ... : de sorte que quero concluyr: que mais proueito temos da carta: por serem os rumos linhas dereitas equidistantes: que per juizo porque sendo assim fique quadrada: e quem por isto a reprende nam sabe o que diz: ...”

No parágrafo mais importante para a justificação da tese desta comunicação, Nunes (2005) sugere a segmentação da carta em folhas (em escala grande) e apresenta um procedimento operacional para a construção da quadrícula da projecção de Mercator:

“Mas o melhor seria ... que fizessemos a carta de muitos quarteyrões [folhas]: de bom compasso [escala] grande: nos quais guardemos a proporção do meridiano ao parallelo do meo: ... : porque ficariam todas as longuras [longitudes], alturas [latitudes] e rotas [rumos] no certo, ao menos não avera erro notavel: e trazer-se a carta em livro ... E nos quarteyrões ... que passe dos dezoyto graus daltura poderemos fazer todos los graus iguais aos graus do meridiano polla deferença ser pouca: e como daqui passar faremos os graus da longura iguais aos do parallelo do meo: porque ho que por huma parte se acrescenta por outra se diminue”.

De acordo com Fontoura da Costa (1983), o matemático inglês Edward Wright (1561 a 1615) publicou, em 1594, uma tabela de secantes de 10' em 10' para operacionalizar o cálculo das latitudes acrescidas. Em 1599, Edward Wright publicou o livro *“Certaine Errors in Navigation, arising either of the ordinarie erroneous making ...”*, que já inclui uma tábua de secantes de 1' em 1'. Na introdução ao seu livro, Edward Wright afirma:

“because the errors I poynt at in the chart, have been poynted out by others, especially by Petrus Nonius, out of whom most part of the first chapter of the Treatise following is almost worde for worde translated.”

Ainda de acordo com Fontoura da Costa (1983), a relação analítica entre a distância à perpendicular (p) e a latitude (ϕ) aparece pela primeira vez, em 1645, no apêndice de um livro de navegação de Richard Norwood, escrito por Henry Bond:

“The meridian line was analogous to a scale of logarithmic tangents of half the complements of the latitudes”.

Note-se que o logaritmo natural (ln) foi introduzido, apenas em 1614, pelo matemático escocês John Napier, na obra “*Mirifici Logarithmum Canonis Constructio*”.

A Relação entre o Preceito de Pedro Nunes e a Projecção de Mercator

No “Tratado em Defensam da Carta de Marear”, Pedro Nunes preconiza uma projecção rectangular que mantenha a proporção entre o [arco de] meridiano e o paralelo do meio [à latitude média do arco de meridiano]. Os comprimentos ΔSM , de um arco $\Delta\varphi$ de meridiano, e ΔSP do arco $\Delta\lambda$ de paralelo à latitude média φ_m são dados por:

$$\begin{cases} \Delta SM = \Theta \Delta\varphi \\ \Delta SP = \Theta \cos \varphi_m \Delta\lambda \end{cases} \quad (3)$$

Para que a proporção que se verifica, na esfera, entre os comprimentos ΔSM e ΔSP de um mesmo arco de meridiano e de paralelo ($\Delta\varphi = \Delta\lambda$) se mantenha na carta, é necessário e suficiente que se verifique a condição:

$$\frac{\Delta m}{\Delta p} = \frac{\Theta \cos \varphi_m \Delta\lambda}{\Theta \Delta\varphi} = \frac{\Theta \Delta\lambda}{\Theta \sec \varphi_m \Delta\varphi} \quad (4)$$

onde Δp é o comprimento da imagem cartográfica do arco de meridiano $\Delta\varphi$ cujo comprimento é ΔSM e Δm é o comprimento da imagem do arco de paralelo $\Delta\lambda$ cujo comprimento é ΔSP .

A condição (4) é verificada por dois tipos de projecções cartográficas, que designaremos por tipo A e tipo B. A projecção de tipo A, defendida por Matos (1998), que mantém os comprimentos dos arcos de meridiano, embora diminua os comprimentos dos arcos de paralelo com a latitude, deve verificar (ignorando possíveis constantes de proporcionalidade):

$$\begin{cases} \Delta m = \Theta \cos \varphi_m \Delta\lambda \\ \Delta p = \Theta \Delta\varphi \end{cases} \quad (5)$$

A projecção de tipo A, que não é uma projecção rectangular (como exige Pedro Nunes), pois as imagens dos meridianos são curvas e não mantém os rumos, pode ser posta de parte.

A projecção de tipo B, defendida por Abel Fontoura da Costa (1983), que mantém os comprimentos dos arcos de paralelo e aumenta os comprimentos dos arcos de meridiano com a latitude, deve verificar (ignorando possíveis constantes de proporcionalidade):

$$\begin{cases} \Delta m = \Theta \Delta \lambda \\ \Delta p = \Theta \sec \varphi_m \Delta \varphi \end{cases} \quad (6)$$

A projecção do tipo B é rectangular e mantém os rumos. O preceito de Pedro Nunes de manter a proporção do arco de meridiano ao paralelo do meio é verificado, de forma consistente, pelas projecções rectangulares do tipo B.

Edward Wright, tendo chegado à relação (6), seguramente inspirado pelo Tratado de Nunes, publicou as tábuas de secantes de 10' em 10', para calcular a distância à perpendicular da projecção de Mercator:

$$\Delta p = p(\varphi + \Delta \varphi) - p(\varphi) \approx \Theta \sec \varphi \Delta \varphi \quad (7)$$

Tendo em atenção que a condição (6) deve ser válida para todos os comprimentos de arco de meridiano e paralelo, incluindo os infinitamente pequenos, é possível obter as derivadas das fórmulas da projecção de Pedro Nunes, calculando os limites de (6):

$$\begin{cases} \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta m}{\Delta \lambda} \right) = \frac{\partial m}{\partial \lambda} = \Theta \\ \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta p}{\Delta \varphi} \right) = \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \Theta \sec \varphi \end{cases} \quad (8)$$

As fórmulas da projecção de Pedro Nunes, que resultam (ignorando as constantes de integração) da primitivação das derivadas (8):

$$\begin{cases} m = \Theta \lambda \\ p = \Theta \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) \end{cases} \quad (9)$$

são as conhecidas fórmulas da projecção de Mercator. Invertendo o percurso, as fórmulas da projecção (9) permitem verificar que Edward Wright usou em (7) um desenvolvimento em série de Taylor, truncado na primeira ordem.

O Preceito Geométrico de Pedro Nunes e a Carta de Mercator

Além da contribuição decisiva para a formulação analítica da projecção cartográfica de Mercator, as ideias de Pedro Nunes terão inspirado Mercator na elaboração do seu *mappamundi*. Com efeito Nunes era amigo e correspondente epistolar do astrónomo e matemático inglês John Dee (1527 a

1602), o qual era, por sua vez, amigo e correspondente epistolar de Mercator, que conheceu em Lovaina, quando estudou na Universidade em 1548 (foram ambos, embora em épocas diferentes, alunos do célebre Gemma Frisius).

Seguem-se alguns factos comprovados, que constituem provas circunstanciais de que o *mappamundi* de Mercator foi inspirado em Nunes: i) Existe uma carta de Dee a Mercator, escrita em 1558, em que Dee elogia Nunes e informa Mercator que nomeou aquele como seu testamenteiro literário (Fontoura da Costa 1983); ii) Fontoura da Costa (1983) cita um texto de Mercator: “*Gradus latitudinum versus utrumque polum paulatim auximos pro incremento parallelorum supra rationem quam havent ad aequinotialem*”, ou seja “Aumentámos progressivamente os graus das latitudes, para cada pólo, proporcionalmente ao aumento dos paralelos em relação ao Equador”; iii) Foi recentemente encontrado (D’Hollander 2005) o manuscrito do catálogo das obras existentes na biblioteca pessoal de Mercator, publicado em 1604, com o título “*Librorum bibliotheca clarissimi doctissimi viri piae memoriae Gerardi Mercator*”, onde constam obras de Pedro Nunes (D’Hollander 2005).

Conclusões

Pedro Nunes, no seu “Tratado em Defensam da Carta de Marear”, lançou a ideia e sugeriu o *modus faciendi* da projecção cartográfica rectangular das latitudes acrescidas que conserva os rumos e inspirou, presumivelmente, o *mappamundi* de Mercator.

Tendo em atenção a ligação estabelecida na comunicação entre o preceito geométrico de Pedro Nunes e as fórmulas da projecção cartográfica de Mercator, a sua autoria deve ser atribuída a Pedro Nunes, Edward Wright e Henry Bond.

Referências Bibliográficas

- BERGGREN, J. L. and JONES, A. (2000), *Ptolemy's Geography*, Princeton University Press, Princeton, N. J.
- CANTERS, F. and DECLEIR, H. (1989), *The World in Perspective: A Directory of World Map Projections*, John Wiley, New York.
- CASACA, J. (2004), *Pedro Nunes e a Carta de Mercator*, LNEC, Lisboa.
- CASACA, J. (2005), *A Léguas Náutica Portuguesa do Séc. XV ao Séc. XVIII*, Memória nº 5 da Sociedade de Geografia de Lisboa.
- D' HOLLANDER, R. (2005), *Loxodromie et Projection de Mercator*, Institut Océanographique, Paris.
- FONTOURA DA COSTA, A. (1983), *A Marinharia dos Descobrimentos*, Edições Culturais da Marinha, Lisboa, 4ª Ed.
- MATOS, L. S. (1998), *A Navegação: Os Caminhos de uma Ciência Indispensável in História da Expansão Portuguesa*", Vol. I. Círculo de Leitores, Lisboa.
- NUNES, P. (2002), *Tratado que ho doutor Pero nunez Cosmographo del Rey nosso senhor fez em defensam da carta de marear: cõ o regimento da altura in Obras de Pedro Nunes*, Vol. I., Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- SNYDER, J. P. (1993), *Flattening the Earth: Two Thousand Years of Map Projections*, The University of Chicago Press, Chicago.